

★ 一階述語論理の完全性定理 ★

いことんど

2023 年 12 月 23 日

目次

0	★ はじめに ★	1
1	★ 完全性定理の主張 ★	2
2	★ 証明の準備 ★	3
3	★ 完全性定理の証明 ★	4
4	★ おまけ ★	13
4.1	完全性定理 (別表現) について	13
4.2	disjunction property と existence property	13
4.3	コンパクト性定理	15
5	★ 宣伝 ★	16

0 ★ はじめに ★

この PDF は, Alwe (https://x.com/Alwe_Logic?s=20) さんが企画された『Mathematical Logic Advent Calendar 2023』の 23 日目の記事です. 一階述語論理の完全性定理の証明をします. 完全性定理はロジックの基本的な定理なので, 知っている方も多いかと思います. なのでその後のおまけで, 私が指導教員に教えて頂いたことで完全性定理やその証明に関連しそうなことを色々詰め込みました. たくさんの方に楽しんでいただければ幸いです.

私はロジックを本格的に学び始めて一年未満の初心者で, このような企画に参加するのも初めてです. もし間違えていたり, 分かりにくい, または不適切な箇所などがありましたら, お手数ですが X (旧 Twitter) @ikotondo をお願い致します.

論理式や論理公理, 形式的な証明, (付値を使った) 構造とモデルの定義は既知とします. 形式的な証明は「証明」と書き, 等号記号 $\equiv$ は論理記号に含まれるとしておきます.

1 ★ 完全性定理の主張 ★

この記事で証明する完全性定理の主張は次のようなものです。

定理 1.1: 完全性定理 (基本形)

L を言語, Γ を L -閉論理式の集合とする。このとき, Γ が無矛盾ならば Γ のモデルが存在する。 🇲🇵

完全性定理は、これと同値な次のような形で表されることもあります。

定理 1.2: 完全性定理 (別表現)

L -閉論理式 φ と L -閉論理式の集合 Γ に対して

$$\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi.$$

L -閉論理式の集合は、理論 (公理系) を意図しています。そして理論のモデルというのは、その理論の各公理が成立する数学的対象を形式化したものです。例えば群の理論 T_G は、言語を $L = \{ \cdot, e \}$ (ただし、 $\cdot$ は 2 変数関数記号, e は定数記号) として

$$T_G = \{ \begin{array}{ll} \text{(結合法則)} & \forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z \doteq x \cdot (y \cdot z)), \\ \text{(単位元)} & \forall x (x \cdot e \doteq e \cdot x \doteq x), \\ \text{(逆元の存在)} & \forall x \exists y (x \cdot y \doteq y \cdot x \doteq e) \end{array} \}$$

のように書けます。群の理論の公理が成立する数学的対象として、整数全体 $\mathbb{Z}$ に通常の加法を入れた $(\mathbb{Z}, +)$ が考えられますが、実際にこれは T_G のモデルになります。

また、 $\Gamma \models \varphi$ は「 Γ の全てのモデルで φ が成立する」ことの、 $\Gamma \vdash \varphi$ は「 Γ から φ が証明できる」ことの略記です。

すると完全性定理の主張は、基本形は

理論が無矛盾なら、その理論の各公理が成立する数学的対象が存在する

となり、別表現は

理論の各公理が成立するすべての数学的対象で φ が成立するなら、その理論で φ が証明できる

となります。別表現は更に「理論では、その各公理が成立するすべての数学的対象で成立することはもれなく証明できる」と言い換えることができます。これが完全性定理の「完全」の意図するところなんじゃないかと思っています。

また、完全性定理の逆も成立し、健全性定理と呼ばれています*1。すると、完全性と健全性を合わせて

*1 健全性定理は「理論で証明できることは、その各公理が成立するすべての数学的対象で成立する」と表現できます。つまり、変なことが理論で証明されない、すなわち健全であるということで、「健全性定理」と呼ばれているのだと思っています。

理論が無矛盾であることと、その各公理が成立する数学的対象が存在することは同値

そして

理論の各公理が成立するすべての数学的対象で φ が成立することと、理論で φ が証明できることは同値となります。

2 ★ 証明の準備 ★

完全性定理の証明に必要な事柄を列挙していきます。

補題: Tukey の補題 (弱い形)

A の部分集合に関する性質 P が有限的な性質：

X が P を満たす $\iff X$ の任意の有限部分集合 X_0 が性質 P を満たす。

だとする。

このとき、性質 P を満たす $X \subset A$ がひとつでも存在すれば、そのような集合の中で、 X を包含し、包含関係に関して極大なものが存在する。

「極大」とは「それより大きいものがない」ということです^{*2}。Tukey の補題によって得られた集合 $\bar{X}$ は、

- 性質 P を満たす。
- A の部分集合である。
- X を包含する。

の集合たちのなかで極大、すなわち $\bar{X}$ を包含する他の集合はいません。言い換えると、 $\bar{X}$ を真に包含する A の部分集合を考えると、必ず性質 P を満たさなくなります^{*3}。

補題: 演繹定理

L を言語、 Γ を L -閉論理式の集合、 φ を L -閉論理式、 θ を L -論理式とする。このとき、以下は同等である。

- (1) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta$.
- (2) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \theta$.

例えば、 Γ をモノイドの理論^{*4}、 φ を「どの元にも逆元が存在する」を意味する論理式、 θ を「どの元にも逆元が一意的に存在する」を意味する論理式とします。モノイドの任意の元について、逆元が存在すると仮定すると、その一意性が証明できます ($\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \theta$)。モノイドにおいてすべての元に逆元が存在するとそれは群になりますから、これはすなわち群において逆元が一意的に存在することが証明できるということ ($\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta$)

^{*2} 「最大」とは少し違います。「最大」は「他のどんなものより大きい」という意味です。異なる点としては例えば、最大元は高々一つしか存在しませんが、極大元はいくつも存在し得ることが挙げられます。

^{*3} $X \subset \bar{X}$ なので、 $\bar{X}$ を包含する集合は、 X を包含します

^{*4} 群の理論から「逆元の存在」を意味する論理式を抜いたもの。自然数全体 $\mathbb{N}$ に通常の乗法を入れた $(\mathbb{N}, \cdot)$ はモノイドの理論の公理が成立する数学的対象です。

と同じです。演繹定理は、このような議論を形式的な論理体系にも写し取れるということを言っています。

定義 2.1: 矛盾と無矛盾

Γ を閉論理式の集合とする。

- (1) Γ が矛盾しているとは、ある論理式 ψ が存在して $\Gamma \vdash \psi$ と $\Gamma \vdash \neg\psi$ の両方が成立することである。
- (2) Γ が無矛盾であるとは、 Γ が矛盾していないことを言う。

Γ が矛盾していることと、どんな論理式も「証明」できることは同値です。

無矛盾性は、Tukey の補題で登場した「有限的な性質」です。すなわち、閉論理式の集合 Γ に対して、

$$\Gamma \text{ は無矛盾} \iff \Gamma \text{ の任意の有限部分集合は無矛盾}$$

が成立します。

証明. ($\implies$) は明らか。

($\impliedby$) については、対偶

$$\Gamma \text{ が矛盾している} \implies \Gamma \text{ の有限部分集合で矛盾しているものがある}$$

を考える。 Γ から $\psi, \neg\psi$ を導く「証明」に現れる Γ の元は有限個なので、それらを集めた集合は矛盾している Γ の有限部分集合になる。

演繹定理から次がわかります。

補題 2.2

L を言語、 φ を L -閉論理式、 Γ を L -閉論理式の集合とする。このとき $\Gamma \cup \{\varphi\}$ が矛盾するならば、 $\Gamma \vdash \neg\varphi$ である。

3 ★ 完全性定理の証明 ★

もう一度、これから証明する完全性定理の主張を述べておきます。

定理: 完全性定理 (基本形)

L を言語、 Γ を L -閉論理式の集合とする。このとき、 Γ が無矛盾ならば Γ のモデルが存在する。

本格的な証明に入る前に、証明の大まかな流れを説明します。

- (1) 言語 L に含まれない新しい定数記号をたくさん用意します。
- (2) (1) で用意した定数記号を用いて、一手間加えた上で (!) Tukey の補題 (弱い形) を用いて Γ をめいっぱい膨らませます。それを Γ^* と呼ぶことにします。ここで加えた一手間は、次の (3) の伏線です。
- (3) Γ^* のモデル M^* を作ります。ここが証明の肝になります。
- (4) 最後に、 L^* -構造 M^* を L に制限すると、 Γ のモデルになることを示します。

これによると、 Γ のモデルを構成するために、 Γ^* のモデルの構成を経由するようです。これは何故でしょうか。それを見るために、前件を少し弱めて、 L -構造 M で

$$\Gamma \vdash \varphi \implies M \models \varphi \quad (1)$$

をみたすものを直接構成することを考えてみます。そのようなものを構成できれば、 $\varphi \in \Gamma \implies \Gamma \vdash \varphi$ なので、それが Γ のモデルになります。構成した L -構造 M が条件 (1) をみたすことを、 φ の構成に関する帰納法で示すことを考えます。 M をうまく構成して、 φ が原子論理式のときは条件 (1) をみたすようにできたとします。しかしこのとき、 φ が原子論理式でないときにもうまいくとは限りません。なぜなら例えば $\varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi(t)$ (ただし t は閉項) に対しては成立しているとき

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 &\not\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi_1 \text{ または } \Gamma \vdash \varphi_2 \\ &\implies M \models \varphi_1 \text{ または } M \models \varphi_2 && (\text{帰納法の仮定}) \\ &\implies M \models \varphi_1 \vee \varphi_2 && (\text{論理式の解釈}) \end{aligned}$$

だったり

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \neg\psi &\implies \Gamma \not\vdash \psi && (\Gamma \text{ の無矛盾性}) \\ &\not\Rightarrow M \models \psi \\ &\implies M \models \neg\psi && (\text{論理式の解釈}) \end{aligned}$$

だったり

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \exists x\psi(x) &\not\Rightarrow \text{ある閉項 } t \text{ が存在して } \Gamma \vdash \psi(t) \\ &\implies M \models \psi(t^M) && (\text{帰納法の仮定}) \\ &\implies \exists a \in M (M \models \psi(a)) \\ &\implies M \models \exists x\psi(x) && (\text{論理式の解釈}) \end{aligned}$$

となる場合があるからです。これらは M の作り方が下手だからうまくいっていないのではありません。次のように改善すればうまくいきます。

- $\varphi_1 \vee \varphi_2$ の場合 … Γ が完全である。
- $\neg\psi$ の場合 … $\Gamma \vdash \varphi \iff M \models \varphi$ を示す。
- $\exists x\psi(x)$ の場合 … $\Gamma \vdash \exists x\psi(x)$ なら、ある項 t が存在して $\Gamma \vdash \psi(t)$ となる。

そこで、 Γ からこれらをみたすような閉論理式の集合 Γ^* を作って、それを用いて Γ のモデルを作ろう、というのがこの証明の方針です。

それでは、完全性定理を証明していきます^{*5}。証明の本筋は常体で、証明のお気持ちや補足説明は敬体で書きます。

証明. (1) Γ を L -閉論理式からなる無矛盾な集合とする。

^{*5} 言語 L が可算濃度とは限らない一般の場合について証明しているので極限順序数が登場します。順序数について知らない方は L は可算言語だとして、順序数についての話は自然数に置き換えて頂いて構いません。順序数は小文字のギリシャ文字で表されていて、特に ω とは $\mathbb{N}$ だと思って良いです。

(2) κ を

$$\kappa = \begin{cases} \omega & |L| \leq \omega \\ |L| & |L| > \omega \end{cases}$$

なる順序数とする.

L に属さない定数記号を κ 個用意してその集合を $C = \{c_\xi : \xi < \kappa\}$ とし, さらに

$$L^* = L \cup C$$

とする.

今, 自由変数を 1 つだけ持つ L^* -論理式は κ 個ある. これらを

ξ 番目の論理式には, 番号が ξ より小さい C の元しか現れない

をみたすように整列順序付ける. その上で, Γ_ξ ($\xi \leq \kappa$) を次のように再帰的に定義する.

- (i) $\Gamma_0 = \Gamma$
- (ii) $\Gamma_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha \cup \{\exists x \varphi_\alpha(x) \rightarrow \varphi_\alpha(c_\alpha)\}$
- (iii) $\Gamma_\gamma = \bigcup_{\xi < \gamma} \Gamma_\xi$ (γ が極限順序数のとき)

特に κ は極限順序数なので $\Gamma_\kappa = \bigcup_{\xi < \kappa} \Gamma_\xi$ である.

L に属さない新しい定数記号 c_ξ たちの個数 κ は, 自由変数がひとつの $L^* = (L \cup C)$ -論理式たちと同じ数になるように設定されていたわけです. そして, それを C を用意する前からとれる, というのが無限の面白ポイントだと思います.

Γ に $\exists x \varphi_\xi(x) \rightarrow \varphi_\xi(c_\xi)$ なる形の論理式をすべて付け加えて Γ_κ にするのが, 上の方針で言っていた「一手間」です. 「 $\exists x \varphi_\xi(x) \rightarrow \varphi_\xi(c_\xi)$ 」という論理式は,

φ_ξ を満たす x が存在するなら, c_ξ がその証拠 (witness) である.

ということを主張しています. これによって, Γ_κ で $\varphi_\xi(x)$ を満たす x の存在が「証明」できたなら, その witness となる c_ξ が必ず存在して Γ_κ で $\varphi(c_\xi)$ が「証明」できます.

ではなぜ自由変数が 1 つの論理式だけを考えているのでしょうか? 自由変数を複数持つ L^* -論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ についても,

それを満たす $x_1, \dots, x_n$ の存在が「証明」できたら, その証拠を取れる

が成り立ってほしいと考えるのは自然だと思います. 実は, Γ_κ はその要望にも答えてくれます. つまり, 自由変数が 1 つの場合だけ考えれば十分なのです. 簡単のため, $\Gamma_\kappa \vdash \exists x_1 \exists x_2 \varphi(x_1, x_2)$ の場合を考えましょう. x_1 の量化を外した $\exists x_2 \varphi(x_1, x_2)$ は自由変数が 1 つの論理式ですから, x_1 の存在の witness である c_{ξ_1} が取れて $\Gamma_\kappa \vdash \exists x_2 \varphi(c_{\xi_1}, x_2)$ となります. すると x_2 の量化を外した $\varphi(c_{\xi_1}, x_2)$ も自由変数が 1 つの論理式ですから, 再び x_2 の存在の witness である c_{ξ_2} が取れて, $\Gamma_\kappa \vdash \varphi(c_{\xi_1}, c_{\xi_2})$ となります. これで, きちんと目的が果たされていることが分かりました.

特に, L -論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ に対して,

$\Gamma \vdash \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ ならば, ある $c_{\xi_1}, \dots, c_{\xi_n}$ があって $\Gamma_\kappa \vdash \varphi(c_{\xi_1}, \dots, c_{\xi_n})$

となります. つまり, Γ で φ をみたす x たちの存在が示せたとき, Γ はその witness を取ってこれるとは限りませんが, Γ_κ なら取ってこれるわけです (4.2 節参照).

この Γ_κ を Tukey の補題 (弱い形) によってめいっぱい膨らませます. このとき, 「有限的な性質」として「無矛盾である」を使うのですが, そのためには Γ_κ が無矛盾であることを示しておかないといけません. これは気持ち的には明らかです. なぜなら, すでに述べたように Γ_κ は Γ に「存在が示せたら, C の中にその証拠がある」ということを追加しただけで, Γ の内容とパッチングするような変なことは入れていないからです.

補題

Γ_κ は L^* において無矛盾である.

証明. $\kappa + 1$ 上の超限帰納法で示す.

- (i) 仮定より $\Gamma_0 = \Gamma_\kappa$ は無矛盾なので明らか.
- (ii) $\Gamma_{\alpha+1}$ について. Γ_α が無矛盾で, $\Gamma_{\alpha+1}$ が矛盾していると仮定する. $\Gamma_\alpha \cup \{\exists x \varphi_\alpha(x) \rightarrow \varphi(c_\alpha)\}$ が矛盾しているので, 補題 2.2 より $\Gamma_\alpha \vdash \neg(\exists x \varphi_\alpha(x) \rightarrow \varphi(c_\alpha))$, すなわち $\Gamma_\alpha \vdash \exists x \varphi_\alpha(x) \wedge \neg \varphi(c_\alpha)$. 故に

$$\Gamma_\alpha \vdash \exists x \varphi_\alpha(x), \quad \Gamma_\alpha \vdash \neg \varphi(c_\alpha)$$

である. $\Gamma \vdash \neg \varphi(c_\alpha)$ について, Γ_α と φ_α には C の元は c_ξ ($\xi < \alpha$) しか現れないので, 一般化定理によって

$$\Gamma_\alpha \vdash \forall x \neg \varphi_\alpha(x)$$

が分かる. さらに $\Gamma_\alpha \vdash \exists x \varphi_\alpha(x)$ は $\Gamma_\alpha \vdash \neg \forall x \neg \varphi_\alpha(x)$ と同値なので, $\Gamma_\alpha \vdash \forall x \neg \varphi_\alpha(x)$ と $\Gamma_\alpha \vdash \neg \forall x \neg \varphi_\alpha(x)$ の両方が成立することになる. しかしこれは Γ_α の無矛盾性に反している.

- (iii) Γ_γ (ただし γ は極限順序数) のとき. 任意の $\xi < \gamma$ について Γ_ξ が無矛盾で, Γ_γ が矛盾していると仮定する. すると, 無矛盾性が有限的な性質であることから, Γ_γ の有限部分集合 Γ' で矛盾しているものが存在する. 今 Γ_ξ ($\xi < \gamma$) たちは

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \cdots \subset \Gamma_\xi \subset \cdots$$

という $\subset$ -無限上昇列をなすので, ある $\xi < \gamma$ が存在して $\Gamma' \subset \Gamma_\xi$, すなわち Γ' が Γ_ξ の矛盾した有限部分集合となる. すると再び無矛盾性が有限的な性質であることから, Γ_ξ が矛盾していることになり, 帰納法の仮定に反する.

以上により, 任意の $\xi \leq \kappa$ について Γ_ξ が L^* で無矛盾なので, 特に Γ_κ は L^* で無矛盾である. 

Tukey の補題 (弱い形) において, A を L^* -論理式全体の集合, 性質 P を「 L^* で無矛盾である」, X を Γ_κ として, 無矛盾かつ Γ_κ を包含して包含関係に関して極大な Γ^* を取る.

Γ^* に対して, 次が成立する.

補題 3.1

φ が L^* -閉論理式なら, $\varphi \in \Gamma^*$ または $\neg \varphi \in \Gamma^*$ のいずれか一方が成立する.

証明. Γ^* は無矛盾なので, どちらも成立することはありえない.

どちらも成立しないような L^* -閉論理式 φ が存在したと仮定する. Γ^* の極大性から, $\Gamma^* \cup \{\varphi\}$ も $\Gamma^* \cup \{\neg\varphi\}$ もどちらも矛盾する. すると補題 2.2 より $\Gamma^* \vdash \neg\varphi$ と $\Gamma^* \vdash \neg(\neg\varphi)$ がともに成立する. これは Γ^* が無矛盾であることに反する. 

補題 3.2

Γ^* は形式的体系の帰結で閉じている. すなわち, L^* -閉論理式 φ に対して

$$\Gamma^* \vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma^*$$

が成立する.

特に, φ と $\varphi \rightarrow \psi$ がともに Γ^* の元ならば, ψ も Γ^* の元である. 

証明. ($\implies$) ある L^* -閉論理式 φ が存在して $\Gamma^* \vdash \varphi$ であるが $\varphi \notin \Gamma^*$ であると仮定する. $\varphi \notin \Gamma^*$ と補題 3.1 から $\neg\varphi \in \Gamma^*$ となる. これにより $\Gamma^* \vdash \varphi$ と $\Gamma^* \vdash \neg\varphi$ となるが, これは Γ^* が無矛盾であることに反する.

($\impliedby$) 明らか. 

ここで, これら 2 つの補題の証明において使われているのは Γ^* の極大性と無矛盾性だけで, Γ を Γ_κ に膨らませた「一手間」は本質的には関係していないことに注意してください.

- (3) 次に, L^* -構造 M^* を, Γ^* のモデルになるように作ります. そのためには, 領域 (同じ名前で M^* と呼びます) と L^* の元の解釈を, $\varphi \in \Gamma^*$ なる L^* -論理式 φ がすべて $M^* \models \varphi$ となるように定める必要があります. 特に原子論理式 $t \doteq u$ (ただし t, u は L^* -閉項) については, Γ によらず「 $M^* \models t \doteq u$ とは, M^* 上で t^{M^*} と u^{M^*} が等しいことである」と定義されているので, $t \doteq u \in \Gamma^*$ のときに t^{M^*} と u^{M^*} が M^* 上で等しくなってくれるように, 領域 M^* と L^* の元の解釈を定める必要があります.

L^* 閉項全体の集合を $Term$ として, その上に関係 $\sim$ を

$$t \sim u \iff t \doteq u \in \Gamma^*$$

で定める.

補題

$\sim$ は同値関係である. 

証明. 補題 3.2 により $t \sim u$ とは $\Gamma^* \vdash t \doteq u$ のことであり, 等号が同値関係であることは論理の形式体系から「証明」できるので, それによって $\sim$ が同値関係であることも分かる. 

これらを用いて, 目的の構造 M^* の領域 M^* を

$$M^* = Term / \sim$$

で定義する.

Γ を Γ_κ に膨らませた「一手間」によって, 次が成立します.

補題 3.3

$[t] \in M^*$ の代表元として $c \in C$ が取れる.



証明. $t \in Term$ について, $x \doteq t$ は自由変数が1つの L^* -論理式である. 故にある $c \in C$ が存在して $\exists x(x \doteq t) \rightarrow c \doteq t$ が Γ^* に属する. すると $\vdash \exists x(x \doteq t)$ と補題 3.2 より $c \doteq t \in \Gamma^*$ が分かる. 従って $\sim$ の定義から $c \sim t$ であり, $[t]$ の代表元として $c \in C$ を取れる.

次に, L^* に属する各記号の解釈を定義します.

$c \in L^*$ を定数記号, $P \in L^*$ を n 変数述語記号, $F \in L^*$ を n 変数関数記号, $t, t_1, \dots, t_n \in Term$ として

- $c^{M^*} = [c]$
- $P^{M^*} = \{([t_1], \dots, [t_n]) \in (M^*)^n : P(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^*\}$
- $F^{M^*}([t_1], \dots, [t_n]) = [t] \iff F(t_1, \dots, t_n) \doteq t \in \Gamma^*$

と定める.

定数記号と述語記号の解釈はこれでなんの問題ありませんが, 関数記号の解釈については, この定義が関数として well-defined であること, すなわち

- F^{M^*} がきちんと関数になっている, すなわち各 $[t_1], \dots, [t_n] \in M^*$ について, その行き先が唯一つ定まること.
- F^{M^*} による $[t_1], \dots, [t_n] \in M^*$ の行き先が $[t_1], \dots, [t_n]$ の代表元の取り方によらないことを示す必要があります.

証明. 簡単のため, F が1変数関数記号であるときについて示す.

どんな $[t_1] \in M^*$ に対しても $F^{M^*}([t_1]) = [t]$ なる $[t] \in M^*$ が存在することについて. $\Gamma^* \vdash F(t_1) \doteq F(t_1)$ であるので, 補題 3.2 より $F(t_1) \doteq F(t_1) \in \Gamma^*$. 故に関数記号の解釈の定義から $F^{M^*}([t_1]) = [F(t_1)]$ となり, $F^{M^*}([t_1]) = [t]$ なる $[t]$ として $[F(t_1)]$ が取れる.

また, $F^{M^*}([t_1])$ の行き先の一意性と, その行き先が代表元の取り方によらないことは,

$$t_1 \sim t'_1 \text{ かつ } F(t_1) \doteq t \in \Gamma^* \text{ かつ } F(t'_1) \doteq t' \in \Gamma^* \text{ のときに } t \sim t'$$

を示せばまとめて分かる. $t_1 \sim t'_1$ とすると $\Gamma^* \vdash t_1 \doteq t'_1$ で, これにより $\Gamma^* \vdash F(t_1) \doteq F(t'_1)$ が分かる. すると $\Gamma^* \vdash F(t_1) \doteq t$, $F(t'_1) \doteq t'$ と合わせて $\Gamma^* \vdash t \doteq t'$ となり, $t \sim t'$ が分かる. これによって, F^{M^*} の行き先が代表元の取り方によらないことはすぐに分かる. また $F^{M^*}([t_1])$ の行き先が一意的であることは, $F^{M^*}([t_1]) = [t]$ かつ $F^{M^*}([t_1]) = [t']$ とすると $t_1 \sim t_1$ かつ $F(t_1) \doteq t \in \Gamma^*$ かつ $F(t_1) \doteq t' \in \Gamma^*$ となることから, $t \sim t'$ すなわち $[t] = [t']$ となって分かる.

以上のように構造を定めると, 「等号を等号として解釈」できていることが, 次の補題によって確かめられます.

補題 3.4

項 $t(x_1, \dots, x_m)$ と $t_1, \dots, t_m \in Term$ に対して,

$$t^{M^*}([t_1], \dots, [t_m]) = [t(t_1, \dots, t_m)]$$

である.

証明. t に現れる関数記号の数 n に関する帰納法で証明する. 簡単のため, 項 $t(x)$ のときを示す.

(i) $n = 0$ のとき. t は変数 x か定数記号 c のどちらかである.

- t が変数 x のとき.

$$t^{M^*}([t_1]) = [t_1] = [t(t_1)].$$

より成立する.

- t が定数記号 c のとき.

$$t^{M^*}([t_1]) = c^{M^*} = [c] = [t(t_1)]$$

より成立する.

(ii) $n > 0$ のとき. n 未満で補題が成立していると仮定する. 簡単のため, t が 1 変数関数記号 F と項 $s(x)$ を用いて $F(s(x))$ となっているときを示す. s に現れる関数記号は n 個未満である. 故に

$$\begin{aligned} t^{M^*}([t_1]) &= F^{M^*}(s^{M^*}([t_1])) && \text{(項の解釈の定義)} \\ &= F^{M^*}([s(t_1)]) && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= [F(s(t_1))] && \text{(F の解釈の定義)} \\ &= [t(t_1)] \end{aligned}$$

となって成立する.



この補題で t, u を L^* -閉項として取って $t \doteq u \in \Gamma^*$ とすると, $[t] = [u]$ なので

$$t^{M^*} = [t] = [u] = u^{M^*}$$

となって, 確かに「等号を等号として解釈」できている, すなわち閉項 t, u に対して $t \doteq u$ が Γ^* で「証明」できるときに, M^* 上でも等しくなっていることが分かります.

また, ここまでの議論で Γ を Γ_κ に拡張した「一手間」が本質的には関わっているのは, 補題 3.3 だけであることを強調しておきます.

次に, この L^* -構造 M^* が Γ^* のモデルになっていることを示します.

補題

L^* -閉論理式 φ に対して,

$$\varphi \in \Gamma^* \iff M^* \models \varphi$$

となる.



証明. φ の構成に関する帰納法で示す. *6 .

*6 (同じ言語の) 構造 M と論理式 $\varphi(x)$, 閉項 t に対して

$$M \models \varphi(t^M) \iff M \models \varphi(t)$$

(i) 原子論理式するとき.

- P を n 変数述語記号, $t_1, \dots, t_n \in Term$ として $P(t_1, \dots, t_n)$ のとき

$$\begin{aligned}
P(t_1, \dots, t_n) \in \Gamma^* &\iff ([t_1], \dots, [t_n]) \in P^{M^*} && (P \text{ の解釈の定義}) \\
&\iff (t_1^{M^*}, \dots, t_n^{M^*}) \in P^{M^*} && (\text{補題 3.4}) \\
&\iff M^* \models P(t_1, \dots, t_n) && (\text{論理式の解釈の定義})
\end{aligned}$$

となるので成立する.

- $t, u \in Term$ として $t \doteq u$ のとき

$$\begin{aligned}
t \doteq u \in \Gamma^* &\iff t \sim u && (\sim \text{ の定義}) \\
&\iff [t] = [u] && (\text{同値類の定義}) \\
&\iff t^{M^*} = u^{M^*} && (\text{補題 3.4}) \\
&\iff M^* \models t \doteq u && (\text{論理式の解釈の定義})
\end{aligned}$$

より成立する.

(ii) 原子論理式でないとき.

- $\varphi_1 \vee \varphi_2$ のとき.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \Gamma^* &\iff \varphi_1 \in \Gamma^* \text{ または } \varphi_2 \in \Gamma^* && (\text{補題 3.2, 補題 3.1}) \\
&\iff M^* \models \varphi_1 \text{ または } M^* \models \varphi_2 && (\text{帰納法の仮定}) \\
&\iff M^* \models \varphi_1 \vee \varphi_2 && (\text{論理式の解釈の定義})
\end{aligned}$$

より成立する.

- $\neg\psi$ のとき.

$$\begin{aligned}
\neg\psi \in \Gamma^* &\iff \psi \notin \Gamma^* && (\text{補題 3.1}) \\
&\iff M^* \models \psi \text{ でない} && (\text{帰納法の仮定}) \\
&\iff M^* \models \neg\psi && (\text{論理式の解釈の定義})
\end{aligned}$$

より成立する.

- $\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ のときは, 上 2 つの場合から分かる.
- $\exists x\psi(x)$ のとき.

$$\begin{aligned}
\exists x\psi(x) \in \Gamma^* &\stackrel{?}{\iff} \exists c \in C \left(\psi(c) \in \Gamma^* \right) \\
&\iff \exists c \in C \left(M^* \models \psi(c) \right) && (\text{帰納法の仮定}) \\
&\iff \exists s \in Term \left(M^* \models \psi(s) \right) && (\text{補題 3.3}) \\
&\iff M^* \models \exists x\psi(x) && (\text{論理式の解釈の定義})
\end{aligned}$$

であるので,

$$\exists x\psi(x) \in \Gamma^* \iff \exists c \in C \left(\psi(c) \in \Gamma^* \right) \tag{2}$$

を示せば良い.

であることは既知とします.

($\Leftarrow$) 論理公理より明らか.

($\Rightarrow$) $\exists x\psi(x) \in \Gamma^*$ とする. $\psi(x)$ は自由変数を 1 つだけ持つ L^* -論理式である. 故にある $c \in C$ が存在して $\exists x\psi(x) \rightarrow \psi(c) \in \Gamma^*$ であり, 補題 3.2 より $\psi(c) \in \Gamma^*$ となる. 従って $\exists c \in C(\psi(c) \in \Gamma^*)$ が分かる.

- $\forall x\psi$ のとき. $\forall x\psi$ は $\neg\exists x\neg\psi$ と同等なので, $\neg$ と $\exists$ の場合から分かる.



この補題で, ψ として L^* -閉論理式を考えれば,

$$\psi \in \Gamma^* \implies M^* \models \psi$$

となって, M^* が Γ^* のモデルになっていることが分かる.

この証明の, $\exists x\psi$ と $\forall x\psi$ のときに「一手間」や補題 3.3 を使いました. これで, (2) で張られた伏線がようやくすべて回収されたわけです.

ところで, 他の $\varphi_1 \vee \varphi_2$ や $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, $\neg\psi$ の場合では, Γ^* の極大性でうまくいきました. なぜ $\exists x\psi$ と $\forall x\psi$ のときには「一手間」が必要になるのでしょうか. $\forall x\psi$ は $\exists x\psi$ を通じて証明したので, $\exists x\psi$ について考えます. 構造 M と (同じ言語の) 論理式 $\psi(x)$ について,

$$M \models \exists x\psi(x) \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{ある } a \in M \text{ が存在して } M \models \psi(a)$$

です. つまり, 構造については「 $\psi(x)$ をみたす x が存在する」とことと, 「 ψ を成り立たせる $a \in M$ が取れる」ことは同値です. しかし, 一般に閉論理式の集合 Γ については,

$$\Gamma \vdash \exists x\psi \not\iff \text{ある項 } t \text{ が存在して } \Gamma \vdash \psi(t)$$

です. $\Leftarrow$ は正しいのですが, $\Rightarrow$ はそうではありません. 「 $\psi(x)$ をみたす x の存在が「証明」できる」としても, 「 $\psi(t)$ が「証明」できる項 t が取れる」とは限りません (4.2 節参照). すると, (2) が証明できなくて困ってしまいます^{*7}. そこで, Γ に「存在が証明できたらその witness がとれる」ということを追加して, $\Rightarrow$ も成立するようにしたのが「一手間」です.

- (4) 構造 M^* に含まれる L^* の解釈を L に制限したものを M と書く.

この M が Γ のモデルになります.

次が成立する.

^{*7} その前に補題 3.3 で「一手間」を使うじゃないかと思うかもしれませんが. そこで, 「一手間」をせずに証明を進めるとどうなるかを書いておこうと思います. C を上と同様に用意して $L^* = L \cup C$ とし, $\Gamma^{*'}$ を Γ を Tukey の補題で拡張した (L^* における) 極大無矛盾集合とします. $\Gamma^{*'}$ も完全で論理的帰結について閉じています. さらに $Term'$ を L^* -閉項の全体, $t, u \in Term'$ について $t \sim u$ を $t \doteq u \in \Gamma^{*'}$ で定めて, 構造 $M^{*'}$ の領域を $Term'/\sim$ で定義します. L の解釈は M^* と同様に定義しておきます. すると, $M^{*'}$ の各元は L -閉項 t の同値類なので

$$\begin{aligned} M^{*'} \models \exists x\psi(x, t_1) &\iff \exists s \in Term' (M^{*'} \models \psi(s, t_1)) && \text{(論理式の解釈の定義)} \\ &\iff \exists s \in Term' (\psi(s, t_1) \in \Gamma^{*'}) && \text{(帰納法の仮定)} \\ &\implies \exists x\psi(x, t_1) \in \Gamma^{*'} && \text{(ここで逆が言えなくて困る!)} \end{aligned}$$

のようになります.

補題

L -論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ と領域 M^* の元 $a_1, \dots, a_n$ について,

$$M \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff M^* \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

となる.



証明. まず, L -項 $t(x, \dots, x_n)$ と $a_1, \dots, a_n \in M^*$ について t^M と t^{M^*} が等しいことを示し, 次にそれを用いて補題の主張を示す. どちらも構成に関する帰納法を回すだけなので省略します. 

これにより, L -文 φ について

$$\begin{aligned} \varphi \in \Gamma &\implies \varphi \in \Gamma^* \\ &\iff M^* \models \varphi \\ &\iff M \models \varphi \end{aligned}$$

となるので M は Γ のモデルである.



4 ★ おまけ ★

私が完全性定理やその証明に関係があると思ったことを色々詰め込みました.

4.1 完全性定理 (別表現) について

1 節において, 3 で証明した完全性定理 (基本形) と同値な別の表現

定理: 完全性定理 (別表現)

L -閉論理式 φ と L -閉論理式の集合 Γ に対して, $\Gamma \models \varphi \implies \Gamma \vdash \varphi$.



を紹介していました. ここでは, それら 2 つが同値であることを確かめます.

証明. (基本形) $\implies$ (別表現) 対偶を示す. $\Gamma \not\models \varphi$ とする. すると $\Gamma \not\models \neg\neg\varphi$ となるので, 補題 2.2 の対偶によって $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ は無矛盾になる. すると完全性定理 (基本形) により, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ にモデル M が存在する. $\neg\varphi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ により $M \models \neg\varphi$ なので, $M \not\models \varphi$ である. 今 $\Gamma \subset \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ より M は Γ のモデルでもあるので, Γ のモデルで φ が正しくないものがある, すなわち $\Gamma \not\models \varphi$ が分かった.

(別表現) $\implies$ (基本形) Γ が無矛盾だとする. すると, ある論理式 φ があって $\Gamma \not\models \varphi$ となる. すると完全性定理 (別表現) の対偶によって, $\Gamma \not\models \varphi$, すなわちある Γ のモデルで φ が正しくないものが存在する. この「ある Γ のモデルが存在して」だけを見れば, Γ のモデルが存在することが分かる.



4.2 disjunction property と existence property

証明の方針 (4) にもある通り, 理論 Γ が次の 2 つの性質

- $\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \implies \Gamma \vdash \varphi_1$ または $\Gamma \vdash \varphi_2$
- $\Gamma \vdash \exists x \psi(x) \implies$ ある閉項 t が存在して $\Gamma \vdash \psi(t)$

を持つとは限りません^{*8}. 理論がこれらの性質を持つとき, その理論はそれぞれ disjunction property (DP), existence property (EP) を持つといいます. DP, EP を持たない理論を紹介します.

Gödel–Rosser の第一不完全性定理によって, $\mathbb{N}$ では正しいが Peano arithmetic (PA) には証明も反証もできない文 G が存在します^{*9}. すなわち, $\text{PA} \nvdash G$ かつ $\text{PA} \nvdash \neg G$ です. しかし, 一階述語論理は排中律を持つので $\text{PA} \vdash G \vee \neg G$ です. 従って, PA は DP を持ちません.

また EP については, PA では証明も反証もできない文 G をとり,

$$\varphi(x) \equiv (x \doteq 0 \wedge G) \vee (\neg(x \doteq 0) \wedge \neg G)$$

とします. このとき,

- $\text{PA} \vdash G \rightarrow (0 \doteq 0 \wedge G)$
- $\text{PA} \vdash \neg G \rightarrow (\neg(0 \doteq 0) \wedge \neg G)$

を通して

- $\text{PA} \vdash G \rightarrow \exists x ((x \doteq 0 \wedge G) \vee (\neg(x \doteq 0) \wedge \neg G))$
- $\text{PA} \vdash \neg G \rightarrow \exists x ((x \doteq 0 \wedge G) \vee (\neg(x \doteq 0) \wedge \neg G))$

が分かり, 排中律によって $\text{PA} \vdash G \vee \neg G$ なので

$$\text{PA} \vdash \exists x ((x \doteq 0 \wedge G) \vee (\neg(x \doteq 0) \wedge \neg G))$$

となります. そこで, ある閉項 t が存在して $\text{PA} \vdash \varphi(t)$ だと仮定しましょう. 諸事情^{*10}により PA に対して $\text{PA} \vdash t \doteq 0$ か $\text{PA} \vdash \neg(t \doteq 0)$ のどちらかが成立します. すると

- $\text{PA} \vdash t \doteq 0$ のとき. $\text{PA} \vdash \varphi(t)$ は, 同値変形により

$$\begin{aligned} & \text{PA} \vdash (t \doteq 0 \wedge G) \vee (\neg(t \doteq 0) \wedge \neg G) \\ & \iff \text{PA} \vdash (\neg(t \doteq 0) \wedge \neg G) \vee (t \doteq 0 \wedge G) \\ & \iff \text{PA} \vdash (t \doteq 0 \vee G) \rightarrow (t \doteq 0 \wedge G) \end{aligned}$$

となる. 今, $\text{PA} \vdash t \doteq 0$ より $\text{PA} \vdash t \doteq 0 \vee G$ なので $\text{PA} \vdash t \doteq 0 \wedge G$ である. すると $\text{PA} \vdash G$ となり, G が PA から独立であることに反する.

- $\text{PA} \vdash \neg(t \doteq 0)$ のとき. 同様に $\text{PA} \vdash (\neg(t \doteq 0) \vee \neg G) \rightarrow (\neg(t \doteq 0) \wedge \neg G)$ から $\text{PA} \vdash \neg G$ となっておかしい.

となり, どちらの場合もうまくいきません. 従って, $\text{PA} \vdash \varphi(t)$ をみたす閉項 t は存在しません. 以上により, PA は EP を持ちません.

^{*8} 構造に対しては, 定義により

- $M \models \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff M \models \varphi_1$ または $M \models \varphi_2$
- $M \models \exists x \psi(x) \iff$ ある $a \in M$ が存在して $M \models \psi(a)$ が必ず成立します.

^{*9} ここでは, サンタさんの存在と同様に, PA の無矛盾性も信じて話を進めます.

^{*10} Σ_1 -完全性

以上の DP, EP のどちらの議論にも、排中律が登場しました。実はこの議論において排中律の使用は本質的で、Heyting arithmetic (以下 HA. 直観主義論理における PA. 排中律を持たない。) は DP も EP も両方持ちます。もっと言うと、 $HA \vdash \exists x \varphi(x)$ のとき、 $HA \vdash \varphi(t)$ なる項 t として、数項 $\bar{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) がとれます。この性質を、numerical existence property (NEP) といいます。

4.3 コンパクト性定理

完全性定理と健全性定理によって、 $PA \vdash \varphi$ というのは、「PA の全てのモデルで φ が成立する」ということと同じです。そして、4.2 小節でも述べたように、PA には「 $\mathbb{N}$ で正しいが証明も反証もできない文 G 」が存在したり、EP, 特に NEP を持たなかったりします。実際、先程 EP の反例としてあげた

$$\varphi(x) \equiv (x \doteq 0 \wedge G) \vee (\neg(x \doteq 0) \wedge \neg G)$$

は NEP の反例でもあります。元々 PA は、 $\mathbb{N}$ の演算や順序を定式化するつもりで作ったものなので、そのモデルは $\mathbb{N}$ だと思っています。しかし、 G や φ の存在から、PA は $\mathbb{N}$ 以外にもモデルを持つことが分かります。というのも、 G は $\mathbb{N}$ で正しい文なので、

$$\mathbb{N} \models G$$

です。しかし、 G は PA から証明も反証もできないので、 G が正しくない PA のモデルが存在することになります (そうでなければ、完全性定理から $PA \vdash G$ となって G の独立性に反するので)。

また、NEP について、 G が $\mathbb{N}$ で正しい文であることから

$$\mathbb{N} \models \varphi(0) \equiv (0 \doteq 0 \wedge G) \vee (\neg(0 \doteq 0) \wedge \neg G)$$

です。特に、 G が正しくなる PA のモデルでは $\varphi(0)$ が正しくなります。しかし、 $PA \not\vdash \varphi(0)$ なので、 $\varphi(0)$ が正しくない PA のモデルが存在します。特に、そのモデル M では $\neg G$ が正しく、

$$M \models \varphi(\bar{n}) \equiv (\bar{n} \doteq 0 \wedge G) \vee (\neg(\bar{n} \doteq 0) \wedge \neg G) \quad (\text{ただし, } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

となります。これにより、どの PA のモデルにも共通して $\varphi(\bar{n})$ が正しくなる $n \in \mathbb{N}$ は存在しないので、どんな $n \in \mathbb{N}$ についても $PA \not\vdash \varphi(\bar{n})$ であるが、どの PA のモデルでも $\exists x \varphi(x)$ の witness が取れるので、 $PA \vdash \exists x \varphi(x)$ となるわけです。

ということで、PA には $\mathbb{N}$ 以外のモデルが有ることが分かりました。そこで、そのようなモデルをひとつ作ってみます。そのためには、次の定理を使います。

定理: コンパクト性定理

Γ を閉論理式の集合とする。このとき、次は同等である。

- (1) Γ はモデルを持つ。
- (2) Γ の任意の有限部分集合がモデルを持つ。



証明. (1) $\implies$ (2) 明らか. Γ のモデルは Γ の任意の有限部分集合のモデルになる。

(2) $\implies$ (1) 対偶を示す. Γ がモデルを持たないとする。すると完全性定理 (基本形) の対偶から Γ は矛盾している。するとある論理式 φ が存在して $\Gamma \vdash \varphi$ と $\Gamma \vdash \neg \varphi$ の両方が成立する。これらの「証明」に現れ

る Γ に属する論理式の全体は, Γ の矛盾した有限部分集合であり, 健全性定理によりモデルを持たない. すなわち, モデルを持たない Γ の有限部分集合が存在する.



L を PA の言語, c を L に現れない定数記号とします. そして, $L \cup \{c\}$ -閉論理式の集合 PA^* を

$$PA^* = PA \cup \{\bar{n} < c : n \in \mathbb{N}\}$$

とします. コンパクト性定理によって, PA^* にモデルが存在することを示します. そのためには, PA^* の任意の有限部分集合 Γ にモデルが存在することを示せばよいです. Γ が PA の部分集合の場合は PA のモデル $\mathbb{N}$ がそのまま Γ のモデルになるので, 任意の自然数 n, m に対して

$$\Gamma = \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\} \cup \{0 < c, \dots, \bar{m} < c\} \quad (\text{ただし } \varphi_0, \dots, \varphi_n \text{ は PA に属する論理式})$$

がモデルを持つことを示せば十分です.

証明. $L \cup \{c\}$ -構造 M を, 領域は $\mathbb{N}$, L の元の解釈は PA のモデル $\mathbb{N}$ と同じ, c の解釈は $m+1$ として定める. すると, $\varphi_i \in \Gamma$ ($i = 0, \dots, n$) については 3 節 (4) の補題と同様にして $M \models \varphi_i$ が分かる. $\bar{j} < c$ については明らか. 従って, M は Γ のモデルになる.



これにより, PA^* の任意の有限部分集合 Γ にモデルが存在することが分かったので, コンパクト性定理によって PA^* にもモデル M^* が存在する. $PA \subset PA^*$ で M^* は $L \cup \{c\}$ -構造なので, M^* から c の解釈を忘れれば, それは PA のモデルになります. しかし, M^* の領域には c の解釈となる元が入っているので, $\mathbb{N}$ と同型にはなりません. 従って, $\mathbb{N}$ とは違う PA のモデルになっています.

5 ★ 宣伝 ★

ここまで読んでくださってありがとうございました. 最後にちょっとした宣伝です!

大阪の難波に, 大学数学を学び始められる個人レッスンや, 学問に関するイベントや勉強会を開催できるレンタルスペースをしている, **SOU 数学ラボ**という場所があります!

個人レッスンは, テキストなどの初期投資は一切ナシで始められます. 無料の面談も実施しているので, お気軽にお申し込みください. 詳しくは <https://www.math-lesson.com> を御覧ください.

レンタルスペースは,

- 学問をテーマとしている
- オープンな会である
- 各会開催前に告知, 終了時に活動報告をする

という条件を満たしていれば, どなたでも使用していただけます. 勉強会やイベントの企画・運営経験のない方でも, 運営が軌道に乗るまでは管理人のサポートが受けられます. 開催日時や利用料金など, 詳しくは <https://soumathlabo.wixsite.com/sou-math-labo/space-rental> を御覧ください.

参考文献

- [1] 坪井明人, 『数理論理学の基礎・基本』, 森北出版,