

一階述語論理の便利な事実

いことんど

2024 年 6 月 8 日

目次

0	この PDF について	1
1	公理	1
2	定理	2
3	証明	3
3.1	定理 2.1	3
3.2	定理 2.2	3

0 この PDF について

独断と偏見で「後で見返したいな～」と思った一階述語論理の事実を集めました。

1 公理

論理公理と推論規則は、坪井『数理論理学の基礎・基本』に倣って、以下を採用する。論理公理は

トートロジー

命題論理のトートロジーに現れる命題変数を論理式で置き換えてできた論理式の自由変数をいくつか $\forall$ で束縛したもの。

量化記号の論理公理

(1) 論理式 ψ と、変数 x が自由変数として現れない論理式 φ ごとに

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$$

の形をした論理式の自由変数をいくつか $\forall$ で束縛したもの。

(2) 論理式 φ と、現れる変数が $\varphi(t, y, \dots)$ の中で束縛されない項 t ごとに

$$\forall x\varphi(x, y, \dots) \rightarrow \varphi(t, y, \dots)$$

の形をした論理式の自由変数をいくつか $\forall$ で束縛したもの。

等号の論理公理 $t(u_0, \dots, u_n)$ を項, $\varphi(u, u_1, \dots, u_n)$ を u に x と y を代入してもどちらも束縛されない論理式とする. このとき,

- (1) $x = x$
 - (2) $x = y \rightarrow t(x, u_1, \dots, u_n) = t(y, u_1, \dots, u_n)$
 - (3) $x = y \rightarrow (\varphi(x, u_1, \dots, u_n) \rightarrow \varphi(y, u_1, \dots, u_n))$
- の形をした論理式の自由変数をいくつか $\forall$ で束縛したもの.

推論規則は

一般化 (Gen) $\vdash \varphi$ ならば $\vdash \forall x \varphi$.

単純推論 (MP) $\vdash \varphi$ かつ $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ ならば, $\vdash \psi$.

$\exists x$ は $\neg \forall x \neg$ の略記であるとする.

2 定理

定理 2.1: 演繹定理

T を理論, φ を文, ψ を論理式とする. このとき

$$T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \iff T \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

例

演繹定理で, φ が文でないときの反例. 言語は $L = \{c\}$ とし, φ を $x = c$, ψ を $\forall x(x = c)$ とする. このとき, $x = c \vdash \forall x(x = c)$ であるが, $\nvdash x = c \rightarrow \forall x(x = c)$ である. 実際, もし $\vdash x = c \rightarrow \forall x(x = c)$ とすると, 自由な x に c を代入することで $\vdash \forall x(x = c)$ となるが, これは領域が 2 元以上からなる構造で偽となる.

定理 2.2

$\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$ を論理式とし, φ に x が自由出現しないとする. このとき

- (1) $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$
- (2) $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- (3) $\vdash \forall x \psi \rightarrow \psi$
- (4) $\vdash \psi \rightarrow \exists x \psi$
- (5) $\vdash \forall x \psi \rightarrow \exists x \psi$
- (6) $\vdash (\varphi \rightarrow \forall x \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$
- (7) $\vdash (\exists x \psi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \rightarrow \varphi)$
- (8) $\vdash (\varphi \rightarrow \exists x \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$
- (9) $\vdash (\forall x \psi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \rightarrow \varphi)$
- (10) $\vdash \exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \exists x \psi)$

$$(11) \vdash \forall x(\psi \wedge \varphi) \leftrightarrow (\forall x\psi \wedge \varphi)$$

例

(3), (4), (5) で逆向きの矢印は成立しない. 言語を $L = \{c\}$, ψ を $x = c$ とすると, 領域が 2 元以上持つ構造が判例モデルになる.

3 証明

3.1 定理 2.1

証明. ($\Leftarrow$) $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ とし, その「証明」を P とする. φ は $T \cup \{\varphi\}$ を仮定とする φ の「証明」なので, P, φ, ψ は $T \cup \{\varphi\}$ を仮定とする ψ の「証明」である.

($\Rightarrow$) $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ の「証明」の長さ n についての帰納法で示す.

(1) $n = 0$ のとき, ψ は論理の公理か $T \cup \{\varphi\}$ の元である. ψ が論理の公理か T の元であるときは, $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ がトートロジーなので MP によって $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$. ψ が φ であるときは, $\varphi \rightarrow \psi$ は $\varphi \rightarrow \varphi$ で, これは恒真であるので $T \vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

(2) $n + 1$ のとき. n 以下で成立すると仮定する. ψ が論理の公理か $T \cup \{\varphi\}$ の元であるときは (1) と同様にすれば良い.

(MP) ψ が $\theta \rightarrow \psi$ と θ から MP で得られているとする. すると, $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ の「証明」の中にそれらの「証明」があるので $T \cup \{\varphi\} \vdash \theta \rightarrow \psi, \theta$ である. さらに, その「証明」はともに長さが n 以下である. すると帰納法の仮定から $T \vdash \varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \psi), T \vdash \varphi \rightarrow \theta$ となり, $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ が分かる.

(Gen) ψ が θ から Gen で得られているとする. すると, MP の場合と同様に $T \vdash \varphi \rightarrow \theta$ が分かる. すると, φ が文であることから $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ が分かる.

□

3.2 定理 2.2

証明. (1) トートロジーなので明らか.

(2) トートロジーなので明らか.

(3) 量化公理 (2) そのもの.

(4) 量化公理 (2) から $\vdash \forall x\neg\psi \rightarrow \neg\psi$. 対偶を取ると $\vdash \psi \rightarrow \neg\forall x\neg\psi$. すなわち $\vdash \psi \rightarrow \exists x\psi$.

(5) (3), (4) から明らか.

(6) ($\Leftarrow$) 量化記号の論理公理.

($\rightarrow$) z を φ にも ψ にも自由出現しない変数とする. すると,

$$\begin{aligned}
& \vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi[z/x]) && \text{(量化公理 (2))} \\
& \implies \vdash \forall z((\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi[z/x])) && \text{(Gen)} \\
& \implies \vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall z(\varphi \rightarrow \psi[z/x]) && \text{(量化公理 (1))} \\
& \implies \vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)
\end{aligned}$$

となって目的が果たされる.

(7) 同値変形によって $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \forall x\neg\psi) \leftrightarrow \forall x(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ と同値であり, これが成立することは (6) から分かる.

(8) 同値変形によって $\vdash \forall x(\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \forall x\neg\psi)$ を示せば良い.

($\rightarrow$) 量化公理 (2) とトートロジーにより $\vdash \forall x(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \varphi$ と $\vdash \forall x(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\psi$ である. 後者に量化公理 (1) を用いると $\vdash \forall x(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \forall x\neg\psi$ が分かり, これらから, 目的の $\vdash \forall x(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\varphi \wedge \forall x\neg\psi)$ が得られる.

($\leftarrow$) まず, $\vdash (\varphi \wedge \forall x\neg\psi) \rightarrow \varphi$ である. さらに, トートロジーと量化公理 (2) から $\vdash (\varphi \wedge \forall x\neg\psi) \rightarrow \neg\psi$. この 2 つから, $\vdash (\varphi \wedge \forall x\neg\psi) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$. これに Gen と量化公理 (1) を適用して, 目的の $\vdash (\varphi \wedge \forall x\neg\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \wedge \neg\psi)$ を得る.

(9) 同値変形によって $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \exists x\neg\psi) \leftrightarrow \exists x(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ と同値であり, これが成立することは (8) から分かる.

(10) (6) の対偶.

(11) (9) の対偶.

□