

witness comparison

いことんど

2024 年 6 月 8 日

言語を算術の言語として固定する.

定理

$\alpha(x)$, $\beta(y)$ を論理式とする. 文 π , θ , σ , χ を次で定義する.

$$\begin{aligned}\pi &:= \forall x(\alpha(x) \rightarrow \exists y \leq x \beta(y)), & \theta &:= \forall y(\beta(y) \rightarrow \exists x < y \alpha(x)), \\ \sigma &:= \exists x(\alpha(x) \wedge \forall y \leq x \neg \beta(y)), & \chi &:= \exists y(\beta(y) \wedge \forall x < y \neg \alpha(x)).\end{aligned}$$

このとき, 次が成立する.

- (1) $\text{PA} \vdash \pi \vee \theta$,
- (2) $\text{PA} \vdash \neg \sigma \vee \neg \chi$,
- (3) $\text{PA} \vdash (\pi \wedge \theta) \rightarrow \forall x \neg \alpha(x)$,
- (4) $\text{PA} \vdash \exists x \alpha(x) \rightarrow (\sigma \vee \chi)$,
- (5) $\text{PA} \vdash \sigma \leftrightarrow (\exists x \alpha(x) \wedge \theta)$,
- (6) $\text{PA} \vdash \exists x \alpha(x) \rightarrow (\chi \leftrightarrow \neg \sigma)$.

π と σ , θ と χ はそれぞれ否定の関係にあることに注意せよ. (図 1 参照)

証明. (1) 次を PA で議論すれば良い.

$\neg \pi$ かつ $\neg \theta$ が (すなわち σ と χ が) 成立すると仮定する. z と u をそれぞれ σ と χ の witness とする. すなわち, $\alpha(z)$ でかつ z 以下で β をみたすものではなく, さらに $\beta(u)$ でかつ u 未満で α をみたすものはないとする. このとき,

- $u \leq z$ とすると, u は $\beta(u)$ をみたすので, z 以下で β をみたすものがないことに矛盾.
- $z < u$ とすると, u 未満で α をみたすものがないことに矛盾.

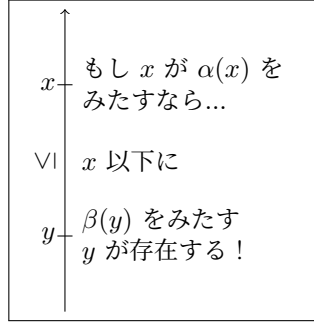
となりどちらの場合も矛盾が生じるので, 全体として矛盾している. 故に $\pi \vee \theta$ である.

(2) σ と χ はそれぞれ π と θ の否定なので (1) からわかる.

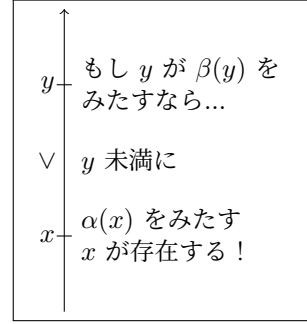
(3) 次を PA で議論すれば良い.

π かつ θ であり, さらに $\exists x \alpha(x)$ も成立すると仮定する. 最小値原理により, $\alpha(z)$ をみたす最小の z が存在する. π によって, z 以下に $\beta(u)$ をみたす u が存在する. すると今度は χ によって, u 未満に $\alpha(v)$ をみたす v が存在する. 今 $v < u \leq z$ となっていて v は z より真に小さいので, これは z の最小性に矛盾している.

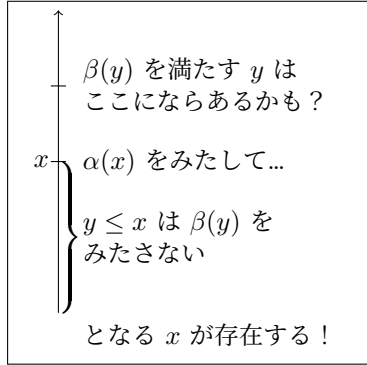
(4) (3) の対偶である.



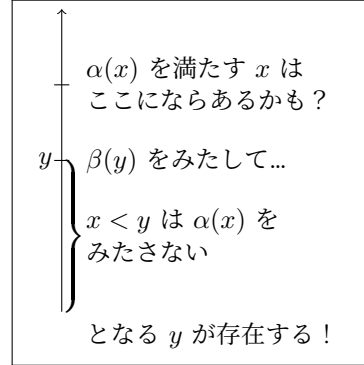
(a) π



(b) θ



(c) σ



(d) χ

図 1: π , θ , σ , χ の気持ち.

(5) ($\rightarrow$) まず, $\vdash \sigma \rightarrow \exists x \alpha(x)$ である. さらに (1) より $\text{PA} \vdash \sigma \rightarrow \theta$. 故に $\text{PA} \vdash \sigma \rightarrow (\exists x \alpha(x) \wedge \theta)$.

($\leftarrow$) (3) より $\text{PA} \vdash \exists x \alpha(x) \rightarrow (\sigma \vee \neg \theta)$ なので,

$$\begin{aligned} \text{PA} \vdash \exists x \alpha(x) \wedge \theta &\rightarrow (\sigma \vee \neg \theta) \wedge \theta \\ &\leftrightarrow \sigma \wedge \theta \\ &\rightarrow \sigma \end{aligned}$$

より $\text{PA} \vdash (\exists x \alpha(x) \wedge \theta) \rightarrow \sigma$ がわかる.

(6) (2) より $\text{PA} \vdash \chi \rightarrow \neg \sigma$. さらに (4) より $\text{PA} \vdash \exists x \alpha(x) \rightarrow (\neg \sigma \rightarrow \chi)$ である. 故に $\text{PA} \vdash \exists x \alpha(x) \rightarrow (\chi \leftrightarrow \neg \sigma)$.

□